

暗算と電卓の数学

2010年4月24日

変更履歴

2010.2.6	V1.000	新規作成
2010.2.7	V1.001	記事追加
2010.2.19	V1.002	記事追加
2010.4.24	V1.003	記事修正

1 暗算のために

暗算をするには算盤を習っていたひとは得意でしょう。でも、以下の式を使うと結構早く計算できます。

$$(x - a)(x + a) = x^2 - a^2 \quad (1)$$

これなんか役に立つ式です。

$$201 \times 199 = (200 + 1)(200 - 1) = 40000 - 1 = 39999$$

といった具合に重宝します。

$$212 \times 188 = (200 + 12)(200 - 12) = 40000 - 144 = 39856$$

まあ、そんなに運のいい組み合わせにあわないって？

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab \quad (2)$$

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 \quad (3)$$

この式達も結構役に立ちます。

表 1 2 乗表

x	x^2
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
11	$(10 + 1)^2 = 100 + 20 + 1 = 121$
12	$4^2 \times 3^2 = 16 \times 9 = 16 \times (10 - 1) = 160 - 16 = 144$
13	$(12 + 1)^2 = 144 + 24 + 1 = 169$
14	$2^2 \times 7^2 = 4 \times 49 = 4 \times (50 - 1) = 200 - 4 = 196$
15	$3^2 \times 5^2 = 9 \times 25 = (10 - 1) \times 25 = 250 - 25 = 225$
16	256 これは覚えておく
17	$(16 + 1)^2 = 256 + 32 + 1 = 289$
18	$2^2 \times 9^2 = 4 \times (10 - 1)^2 = 4 \times (100 - 20 + 1) = 400 - 80 + 4 = 324$
19	$(20 - 1)^2 = 400 - 40 + 1 = 361$

さて、2 乗の数は覚えておくとよいでしょう。覚えなくても先の式から暗算できますけど。
まあ、20 まで覚えておけば十分でしょう。

2 デシベル暗算

デシベルは、関数電卓なしではできないと思っているあなたに暗算でやる方法を教えます。ただし、手元に普通の電卓があるともっといいです。

デシベルは $\log$ ですから、掛け算が足し算、割り算が引き算になります。

$$\log(ab) = \log a + \log b \quad (4)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b \quad (5)$$

また、指数は掛け算になります。

$$\log a^b = b \log a \quad (6)$$

これだけ知っていれば、あとは暗算でできます。

とはいえ、

$$6 = 6.02 = 20 \log 2 = 20 \times 0.30103 \quad (7)$$

$$10 = 9.54 = 20 \log 3 = 20 \times 0.47712 \quad (8)$$

$$20 = 20 \log 10 = 20 \times 1 \quad (9)$$

だけは知っておいて下さい。

4 倍はいくつでしょうか。4 = 2 × 2 より、6 + 6 = 12dB と暗算できますね。

5 倍はいくつでしょうか。 $\frac{10}{2}$ より、20 - 6 = 14dB と暗算できますね。

6 倍はいくつでしょうか。6 = 2 × 3 より、6 + 9.54 = 15.54dB と暗算できますね。

7 倍はいくつでしょうか。うーん。あっそうか、 $7^2 = 49$ で 50 を計算してやるとどうだろう。50 = 5 × 10 だから 14 + 20 = 34dB です。2 乗したから 2 で割って 17dB。関数電卓では 16.9dB だからあっている。

8 倍はいくつでしょうか。8 = 2^3 より、3 × 6 = 18dB と暗算できますね。

9 倍はいくつでしょうか。9 = 3^2 より、2 × 9.54 = 19.08dB と暗算できますね。関数電卓では 19.1dB だからあっている。

11 倍はいくつでしょうか。 $11^2 = 121$ より、120 として、120 = 2 × 2 × 3 × 10 より 6 + 6 + 9.54 + 20 = 41.54dB として 2 乗したから 2 でわると 20.8dB。関数電卓では 20.83dB だからあっている。

13 倍はいくつでしょうか。 $13 \times 13 \times 13 = 2197$ そこで 2200 として $2200 = 2 \times 11 \times 10 \times 10$ より 6 + 20.8 + 20 + 20 = 66.8dB。3 乗しているから 3 で割って、22.27dB。関数電卓では 22.28dB だからあっている。

また、14 = 7 × 2、15 = 3 × 5、16 = 2^4 はいまさらいうまでもないでしょう。

17 倍はいくつでしょうか。 $17^3 = 4913$ から $4900 = 7^2 \times 10 \times 10$ より $2 \times 17 + 20 + 20 = 74\text{dB}$ 。3 乗しているから 3 で割って、 24.7dB 。関数電卓では 24.61dB だからあっている。

では、1.7 倍は? $1.7 = \frac{17}{10}$ ですから $24.7 - 20 = 4.7\text{dB}$ となります。関数電卓では 4.61dB だけどそんなに外してない。

$18 = 2 \times 3 \times 3$ ですね。

19 倍はいくつでしょうか。 $19^4 = 130321$ より、 $130000 = 13 \times 10000$ より、 $22.3 + 80 = 102.3\text{dB}$ となります。4 乗しているから 4 で割って、 25.6dB 。

$21 = 3 \times 7$ 、 $22 = 2 \times 11$ より説明は不要ですね。

23 倍はいくつでしょうか。 $23^3 = 12167$ より、 $12000 = 12 \times 1000$ より、 $6 + 6 + 10 + 60 = 82\text{dB}$ 。3 乗しているから 3 で割って、 27.3dB 。

$24 = 4 \times 6$ 、 $25 = \frac{100}{4}$ 、 $26 = 13 \times 2$ 、 $27 = 3 \times 9$ 、 $28 = 4 \times 7$ は説明不要ですね。

29 倍はいくつでしょうか。 $29^3 = 24389$ より、 $24000 = 24 \times 1000$ より、 $6 + 6 + 6 + 10 + 60 = 88\text{dB}$ 。3 乗しているから 3 で割って、 29.3dB 。

30 倍はいくつでしょうか。 $3 \times 10 = 30$ より、 $9.54 + 20 = 29.54\text{dB}$ 。

31 倍はいくつでしょうか。 $31 \times 29 = 899$ より、 $900 = 9 \times 100$ より、 $19 + 40 - 29.3 = 29.7\text{dB}$ 。

$32 = 4 \times 8$ 、 $33 = 3 \times 11$ 、 $34 = 17 \times 2$ 、 $35 = 5 \times 7$ 、 $36 = 6^2$ はこれ以上の説明の必要はないでしょう。

37 倍はいくつでしょうか。 $37 \times 19 = 703$ より、 $700 = 7 \times 100$ より、 $17 + 40 - 25.6 = 31.4\text{dB}$ 。

$38 = 19 \times 2$ 、 $39 = 13 \times 3$ 、 40 はこれ以上の説明の必要はないでしょう。

41 倍はいくつでしょうか。 $41 \times 27 = 1107$ より、 $1100 = 11 \times 100$ より、 $20.8 + 40 - 9.54 \times 3 = 32.18\text{dB}$ 。

$42 = 6 \times 7$ 、 $44 = 11 \times 4$ 、 $45 = 5 \times 9$ 、 $46 = 23 \times 2$ 、 $48 = 12 \times 4$ はこれ以上の説明の必要はないでしょう。

43 倍はいくつでしょうか。 $43 \times 24 = 1032$ より、 $1000 = 10^3$ より、 $60 - (18 + 9.54) = 32.46\text{dB}$ 。

47 倍はいくつでしょうか。 $47^2 = 2209$ より、 $2200 = 2 \times 11 \times 100$ より、 $\frac{6+20.8+40}{2} = 33.4\text{dB}$ 。

このように 100 までできれば、あとは 10 倍したら 20dB 足し、 $\frac{1}{10}$ なら 20dB 引けばいいのですよね。

表 2 は表計算で作ったデシベルの表です。

表 2 倍率から dB を求める表

10 の位	+0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9
0		0	6.02	9.54	12.04	13.98	15.56	16.9	18.06	19.08
10	20	20.83	21.58	22.28	22.92	23.52	24.08	24.61	25.11	25.58
20	26.02	26.44	26.85	27.23	27.6	27.96	28.3	28.63	28.94	29.25
30	29.54	29.83	30.1	30.37	30.63	30.88	31.13	31.36	31.6	31.82
40	32.04	32.26	32.46	32.67	32.87	33.06	33.26	33.44	33.62	33.8
50	33.98	34.15	34.32	34.49	34.65	34.81	34.96	35.12	35.27	35.42
60	35.56	35.71	35.85	35.99	36.12	36.26	36.39	36.52	36.65	36.78
70	36.9	37.03	37.15	37.27	37.38	37.5	37.62	37.73	37.84	37.95
80	38.06	38.17	38.28	38.38	38.49	38.59	38.69	38.79	38.89	38.99
90	39.08	39.18	39.28	39.37	39.46	39.55	39.65	39.74	39.82	39.91
100	40	40.09	40.17	40.26	40.34	40.42	40.51	40.59	40.67	40.75

例えば、35 なら縦の 10 の位の 30 と横の +5 の交点が dB 値です。
 どうでしょうか。暗算と電卓の計算で十分でしょう。

この表は 1.5 を求めるときは 15 を求め 20dB を引くともとまります。また、150 なら 15 を求め 20dB を足せばもとまります。理由はもうわかりますよね。
 でも、この表は、もうあなたには、必要ないですよ。

3 電気回路への応用—その 1

コンデンサーに溜まっている E(エネルギー W) は、容量を C(F ファラッド)、電圧を V (V ボルト) とすると、

$$E = \frac{1}{2}CV^2 \quad (10)$$

と求められます。300V、100uF なら

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times 100 \times 10^{-6} \times 300^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 10^2 \times 10^{-6} \times (3 \times 10^2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \times 10^2 \times 10^{-6} \times 9 \times 10^4 \\
&= \frac{1}{2} \times 9 \times 10^{2-6+4} \\
&= 4.5
\end{aligned}$$

4.5W ですね。

では、オシロで、電源回路を見たらケミコンの電圧がリップルでピークが $V_1 = 300V$ 、底が $V_2 = 250V$ だったとします。すると、先の式から

$$E = \frac{1}{2}CV_1^2 - \frac{1}{2}CV_2^2 \quad (11)$$

より、

$$E = \frac{1}{2}CV_1^2 - \frac{1}{2}CV_2^2$$

$$E = \frac{1}{2}C(V_1^2 - V_2^2)$$

(1) 式より

$$E = \frac{1}{2}C(V_1 + V_2)(V_1 - V_2)$$

$$E = \frac{1}{2}C(300 + 250)(300 - 250)$$

$$E = \frac{1}{2} \times 100 \times 10^{-6} \times 550 \times 50$$

$$E = \frac{1}{2} \times 10^{-4} \times 550 \times 100 \div 2$$

$$E = \frac{1}{2 \times 2} \times 0.0001 \times 55000$$

$$E = \frac{1}{2 \times 2} \times 5.5$$

$$E = \frac{5.5}{4}$$

$$E = \frac{11}{8}$$

$$E = \frac{8}{8} + \frac{11-8}{8}$$

$$E = 1 + \frac{3}{8}$$

$$E = 1 + 0.125^{*1} \times 3$$

$$E = 1 + 0.375$$

$$E = 1.375$$

と求まります。電源が 50Hz で両波整流なら 1 秒間に 100 回ですから $1.375 \times 100 = 137.5W$ とケミコンの負荷の消費電力がおおよそ 140W と計算できます。

ただし、リップルのピークと底までの時間とリップルの周期による補正が必要です。いま、周期が 10mS で、リップルのピークと底までの時間が 8mS だとすると 140W は 8mS 分ですから、 $\frac{140}{8} \times 10 = 175$ より 175W になります。

トランジスタアンプでリップルをみると $V_1 = 18V$ 底が $V_2 = 15V$ でケミコンが 3300uF だったとすると、

$$E = \frac{1}{2}C(V_1 + V_2)(V_1 - V_2)$$

$$E = \frac{1}{2}C(18 + 15)(18 - 15)$$

$$E = \frac{1}{2}C33 \times 3$$

$$E = \frac{1}{2} \times 3300 \times 10^{-6} \times 33 \times 3$$

$$E = \frac{1}{2} \times 0.003300 \times 33 \times 3$$

$$E = \frac{1}{2} \times 0.003300 \times 99$$

$$E = \frac{1}{2} \times 0.003300 \times (100 - 1)$$

$$E = \frac{1}{2} \times 0.003300 \times 100 - \frac{1}{2} \times 0.003300$$

^{*1} $\frac{1}{2} = 0.5, \frac{1}{4} = 0.25, \frac{1}{8} = 0.125$

$$E = \frac{1}{2} \times 0.33 - \frac{1}{2} \times 0.003300$$

右の項は小さいので無視して

$$E = \frac{1}{2} \times 0.33$$

$$E = 0.33 \div 2$$

$$E = 0.165$$

となり、電源が 50Hz でブリッジ整流なら 1 秒間に 100 回ですから $0.165 \times 100 = 16.5W$ とケミコンの負荷の消費電力がおおよそ 16W と計算できます。

ただし、リップルのピークと底までの時間とリップルの周期による補正が必要です。いま、周期が 10mS で、リップルのピークと底までの時間が 8mS だとすると 16W は 8mS 分ですから、 $\frac{16}{8} \times 10 = 20$ より 20W になります。

コンデンサーのエネルギーは V^2 で効いてきますので、先ほどと比べてかなり小さくなります。したがって、トランジスタの BTL アンプで 15W というのは、かなり大きめのコンデンサーを必要とします。さて、ここでは暗算の勉強であって、電源回路の設計を目的としていませんので、ご注意下さい。

つづく